

تقریب زدن اعداد
و خطای تقریب

«جمعیت ایران هشتاد میلیون نفر است»؛ «تولید سالانه‌ی سیب یک باغ ۳۴۰۰ کیلوگرم است»؛ «فاصله‌ی تهران تا اصفهان ۶۰۰ کیلومتر است».

این جمله‌ها و مشابه آن‌ها را هر روز یا می‌شنویم یا می‌گوییم. اما معنی عددهایی که در این جمله‌ها بیان می‌شوند چیست؟ آیا دقیقاً هشتاد میلیون نفر در ایران زندگی می‌کنند؟ یا درست ۳۴۰۰ کیلو سیب از آن باغ به‌دست‌آمده است؟

اعداد تقریبی و تخمین
(بخش نخست)

در کتاب‌های درسی ریاضی دوره‌ی ابتدایی موضوع‌هایی هستند که یا دانش‌آموزان در یادگیری آن‌ها مشکل دارند یا معلمان در یاددهی آن‌ها. در این دوره از مجله‌ی رشد آموزش ابتدایی، در هر شماره، درباره‌ی یکی از آن‌ها صحبت می‌کنیم. قصد نداریم در اینجا روش تدریس بیان کنیم، بلکه آن را به‌عنوان یک موضوع یا مفهوم ریاضی بررسی خواهیم کرد تا دانش موضوعی خود را برای تدریس بهتر آن افزایش دهیم.

موردنظر داشته باشیم و هم باید بزرگی اعداد را درک کنیم. توانایی «تخمین» یکی از توانایی‌های فرایندی در ریاضیات است که نه‌تنها در اصول و استانداردهای آموزشی بسیاری از کشورها، که در برنامه‌ی درسی ملی ایران نیز بر آن تأکید شده است. در برنامه‌ی درسی ملی ایران، در بخش مربوط به قلمرو حوزه‌ی ریاضیات، از تخمین زدن و دقت یافتن به‌عنوان دو فرایند از فرایندهای ریاضی نام برده شده است که دانش‌آموزان باید با آن‌ها آشنا شوند و در آن‌ها مهارت یابند.

در این مطلب

- با مفهوم تقریب زدن آشنا می‌شویم.
- انواع روش‌های تقریب را مرور می‌کنیم.
- و در شماره‌ی بعد
- با تخمین در انجام چهار عمل اصلی اعداد صحیح و اعشاری آشنا می‌شویم.
- روند آشنایی دانش‌آموزان را با تخمین در شش کتاب ریاضی دوره‌ی ابتدایی مرور می‌کنیم.
- در لابه‌لای این مطالب بعضی موضوعات مرتبط با آموزش تخمین و تقریب را نیز می‌خوانید.

در زندگی روزمره ناچاریم محاسباتی انجام دهیم. برای مثال:

- قیمت کالای پس از تخفیف چقدر است؟
- پس از چند خرید، آیا موجودی کارتمان برای خرید بعدی کافی است؟
- با توجه به کیفیت و وزن و قیمت هر ماده‌ی غذایی، خرید آن از کدام فروشگاه به صرفه‌تر است؟
- بیشتر این محاسبات با دخل و خرج ما و قیمت‌ها مرتبط هستند و معمولاً آن‌ها را با راهبردهای محاسبات ذهنی انجام می‌دهیم. در بسیاری موارد، اصلاً به محاسبه‌ی دقیق و یافتن مقدار دقیق مورد نظر نیاز نداریم و همین که تقریب خوبی از پاسخ داشته باشیم، برای ما کافی است. بنابراین، محاسبات را تخمینی انجام می‌دهیم. علاوه بر تخمین در محاسبات، گاهی باید اندازه‌های چیزهایی را تخمین بزنیم. برای مثال:
- زمان لازم برای انجام یک کار؛
- وزن یک بسته؛
- طول یک شیء؛
- فاصله‌ی دو نقطه.

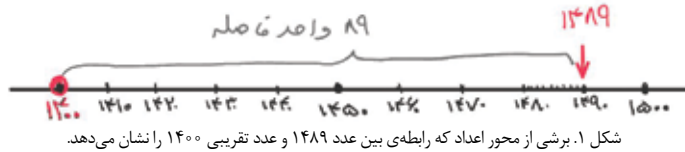
در این موارد نیز اندازه‌ها را به‌صورت تخمینی به دست می‌آوریم و برای اینکه بتوانیم تخمین‌های مناسبی بزنیم، هم باید درک درستی از واحد اندازه‌گیری

روش‌های تقریب زدن

دو روش برای تقریب زدن عددها وجود دارد: قطع کردن؛ گرد کردن.

۱. قطع کردن عدد

در تقریب به روش قطع کردن، از بعضی رقم‌های عدد اصلی صرف‌نظر می‌کنیم. انگار داریم عدد را می‌بریم. مثلاً محصول امسال باغ سیبی ۱۴۸۹ کیلوگرم است. ممکن است برای حمل سیب‌ها با کامیون، دانستن مقدار دقیق آن‌ها در حد زیر صد کیلوگرم نیاز نباشد. در این صورت می‌گوییم محصول باغ تقریباً ۱۴۰۰ کیلوگرم است. در واقع، از مقدار رقم‌های مرتبه‌های یکان و دهگان که از صد کوچک‌تر هستند، صرف‌نظر می‌کنیم. به این ترتیب، اختلاف مقدار واقعی از مقدار تقریبی $1489 - 1400 = 89$ است و ۸۹ از ۱۰۰ (دقت تقریب) کوچک‌تر است. بد نیست روی محور اعداد حقیقی نیز به این عددها نگاهی بیندازیم:



این موضوع در حالت کلی نیز برقرار است: یعنی اگر بخواهیم عددی را با تقریب کمتر از 10^n (یعنی ۱ که 10 تا صفر جلویش است) تقریب بزنیم، باید از مقدار رقم‌هایی که ارزش مکانی آن‌ها از 10^n کوچک‌تر است، صرف‌نظر کنیم. در واقع آن رقم‌ها را برمی‌داریم و به جایشان صفر می‌گذاریم. مثال‌های زیر را ببینید:

مثال ۱. هر عدد با تقریب خواسته شده قطع شده است:

۵۳۸ با تقریب کمتر از ۱ برابر است با خود ۵۳۸

۲۶ با تقریب کمتر از ۱۰ برابر است با ۲۰

۷۴۵۶۳ با تقریب کمتر از ۱۰۰ برابر است با ۷۴۵۰۰

۹۸ با تقریب کمتر از ۱۰۰ برابر است با ۰

۷۴۵۶۳ با تقریب کمتر از ۱۰۰۰۰ برابر است با ۷۰۰۰۰

در مورد اعداد اعشاری نیز دقیقاً همین‌طور است:

۴۵/۱۶۷۴ با تقریب کمتر از یک‌هزارم برابر است با ۴۵/۱۶۷

با تقریب کمتر از یک‌صدم برابر است با ۴۵/۱۶

با تقریب کمتر از یک‌دهم برابر است با ۴۵/۱

با تقریب کمتر از ۱ برابر است با ۴۵

با تقریب کمتر از ۱۰ برابر است با ۴۰

با تقریب کمتر از ۱۰۰ برابر است با ۰.

با انواع تخمین آشنا شوید

تخمین در اندازه: یعنی بدون اندازه‌گیری دقیق، اندازه‌ی مورد نظر را به صورت تقریبی بیان کنیم. مانند طول یک اتاق، یا وزن یک بسته یا زمان رسیدن به یک محل.

تخمین در تعداد: یعنی بدون شمارش دقیق، تعداد اعضای یک مجموعه را بیان کنیم. مانند تخمین تعداد دانش‌آموزان یک کلاس یا تعداد میوه‌های داخل یک ظرف.

تخمین در محاسبات: یعنی بدون انجام محاسبات دقیق، حاصل یک عبارت را به دست آوریم.

برای آشنایی بیشتر با تخمین، مطلب شماره‌ی بعد مجله را نیز مطالعه کنید.

یا از تهران تا اصفهان درست ۶۰۰ کیلومتر راه است؟ قطعاً پاسخ همه‌ی این سؤالات «خیر» است. این عددها مقدارهای تقریبی جمعیت، تولید سیب و فاصله هستند، نه مقدار دقیق آن‌ها. حال این سؤال مطرح می‌شود که مقدار دقیق با مقدار تقریبی چقدر اختلاف دارد؟ یعنی میزان خطا در این تقریب‌ها چقدر است؟ برای اینکه بتوانیم به این سؤال پاسخ دهیم، باید بدانیم این اعداد تقریبی از روی اعداد اصلی چگونه به دست آمده‌اند و دقت تقریب چقدر بوده است؟





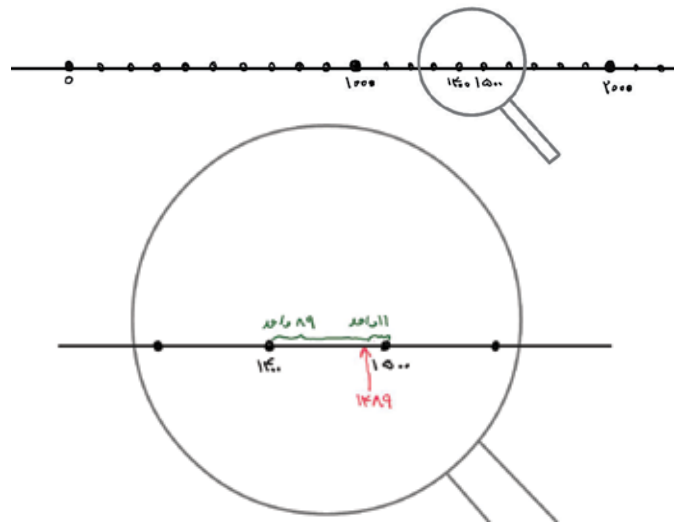
توجه کنید که در قطع کردن اعداد:

- عدد تقریبی همیشه از عدد اصلی کوچک‌تر است. به همین دلیل، گاهی اصطلاحاً می‌گوییم اعداد را با «تقریب نقصانی» تقریب زده‌ایم.
- اختلاف عدد اصلی با عدد تقریبی از دقت تقریب کوچک‌تر است.
- دقت تقریب، توانی از ۱۰ است و با ارزش‌های مکانی اعداد متناظر است.
- باید ارزش مکانی را به خوبی بشناسیم.

روش‌های تقریب زدن

۲. گرد کردن عدد

بار دیگر به داستان باغ سیب برگردیم. محصول یک سال این باغ ۱۴۸۹ کیلوگرم بود، ولی ما برای راحتی کار و اینکه در عمل نیازی به دانستن مقدار دقیق وزن سیب‌ها تا زیر صد کیلوگرم نداشتیم، از ۸۹ کیلوگرم صرف‌نظر کردیم و محصول باغ را ۱۴۰۰ کیلوگرم اعلام کردیم. اما ته ذهنمان این موضوع هست که گرچه ۸۹ کیلوگرم از ۱۰۰ کیلوگرم کمتر است و احتمالاً در کار ما تأثیری نخواهد داشت، ولی این مقدار خیلی به ۱۰۰ نزدیک است. در واقع، از روی محور اعداد معلوم است که ۱۴۸۹ به ۱۵۰۰ نزدیک‌تر است تا به ۱۴۰۰. شکل زیر را ببینید:



شکل ۲. محور اعداد حقیقی که روی آن فاصله‌ی بین عدد ۱۴۸۹ و اعداد ۱۴۰۰ و ۱۵۰۰ را نشان داده‌ایم. این محور ۱۰۰ تا ۱۰۰۰ تا قسمت‌بندی شده است، زیرا در مثال باغ سیب، دقت تقریب عدد ۱۰۰ بود و عددهایی که در هر قسمت هستند، فاصله‌شان تا دو سر آن قسمت از ۱۰۰ واحد کمتر است.

در بسیاری از مسئله‌های عملی و واقعی، از روش دیگری برای تقریب زدن استفاده می‌شود که خطای آن در مواردی کمتر از خطای روش قطع کردن است. این روش به گرد کردن معروف است و ما گاهی حتی در صحبت‌های عادی‌مان نیز به درست یا غلط، از اصطلاح «فلان عدد را گردش کن» استفاده می‌کنیم. اکنون ببینیم در روش گرد کردن چگونه عدد تقریبی از عدد اصلی به دست می‌آید؟

برای تقریب زدن عدد ۱۴۸۹، دقت ۱۰۰ واحد در نظر می‌گیریم. عدد اصلی ۱۴۸۹ نزدیک به ۱۵۰۰ است. اختلاف ۱۱ واحد است. اگر دقت ۱۰۰۰ واحد در نظر بگیریم، اختلاف ۱۱۱ واحد است. دقت ۱۰۰۰۰ واحد در نظر بگیریم، اختلاف ۱۱۱۱ واحد است. دقت ۱۰۰۰۰۰ واحد در نظر بگیریم، اختلاف ۱۱۱۱۱ واحد است. دقت ۱۰۰۰۰۰۰ واحد در نظر بگیریم، اختلاف ۱۱۱۱۱۱ واحد است. دقت ۱۰۰۰۰۰۰۰ واحد در نظر بگیریم، اختلاف ۱۱۱۱۱۱۱ واحد است.

۱. اختلاف عدد ۱۰۰ تا ۱۰۰۰، قسمت بندی کنیم. نزدیک به عدد ۱۰۰۰ است. اختلاف هر دو عدد کمتر از ۱۰۰ است. و ما تقریباً ۱۰۰۰ را تقریباً ۱۰۰۰ گردانیم.

۲. عدد ۱۴۸۹، بین ۱۴۰۰ و ۱۵۰۰ است.

۳. تا عدد ۱۴۸۹ از ۱۵۰۰ کمتر است، پس ۱۴۸۹ از نزدیک این فاصله (بیشتر از ۱۴۵۰) برده است.

۴. پس ۱۵۰۰ عدد تقریب مناسب‌تری است.

• گرد شده ۳۴۷، تقریب ۱۰، ۳۵۰. چون اگر گرد را ۱۰ تا ۳۵۰ کنیم، ۳۴۷ بین ۳۴۰ و ۳۵۰ است. و ۳۴۰ نزدیک‌تر است چون از ۳۴۵ که وسط این فاصله است برده است.

انگوشه گرد کردن:

• همان‌طور که گرد کردن عدد ۱۴۸۹، تقریب ۱۰۰، انگوشه را دنبال می‌کنیم:

۱. نصف تقریب را دست می‌آید:

۲. آن را به عدد وسط نظر جمع می‌کنیم:

۳. عدد حاصل را؛ همان تقریب، قطع می‌کنیم:

قطع: تقریب ۱۰۰، ۱۵۰۰

• چرا این انگوشه دست کار می‌کنند؟

به سؤال‌های زیر فکر کنید:

۱. عدد ۱۸۹۸۱ را با تقریب کمتر از صد، یک‌بار قطع کنید. یک‌بار گرد کنید. دو عدد تقریبی به دست آمده را با هم مقایسه کنید. چه توضیحی دارید؟
۲. عدد ۱۹۸/۹۸۱ را با تقریب کمتر از یک‌صدم، یک‌بار قطع کنید و یک‌بار گرد کنید. دو عدد تقریبی به دست آمده را با هم مقایسه کنید. چه توضیحی دارید؟
۳. عددی را با تقریب کمتر از ۱۰۰، یک‌بار قطع کردیم. یک‌بار گرد کردیم. بیشترین اختلاف این دو عدد تقریبی چه می‌تواند باشد؟ چرا؟
۴. عددی را با تقریب کمتر از ۱۰۰ قطع کردیم، عدد ۱۷۰۰ به دست آمد. آن عدد چیست؟ چرا؟
۵. عددی را با تقریب کمتر از ۱۰۰ گرد کردیم، عدد ۱۷۰۰ به دست آمد. آن عدد چیست؟ چرا؟

ادامه‌ی این مطلب را که در آن با تخمین در محاسبات آشنا می‌شوید، در شماره‌ی بعد مجله بخوانید.



اکنون مثال‌های زیر را ببینید:

مثال ۲. هر عدد با تقریب خواسته شده گرد شده است:

۵۳۸ با تقریب کمتر از ۱ برابر است با خود ۵۳۸

۲۶ با تقریب کمتر از ۱۰ برابر است با ۳۰

۷۴۵۶۳ با تقریب کمتر از ۱۰۰ برابر است با ۷۴۶۰۰

۹۸ با تقریب کمتر از ۱۰۰ برابر است با ۱۰۰

۷۴۵۶۳ با تقریب کمتر از ۱۰۰۰۰ برابر است با ۷۰۰۰۰

در مورد اعداد اعشاری نیز دقیقاً همین‌طور است:

۴۵/۱۶۷۴ با تقریب کمتر از یک‌هزارم، برابر است با ۴۵/۱۶۷

با تقریب کمتر از یک‌صدم، برابر است با ۴۵/۱۷

با تقریب کمتر از یک‌دهم برابر است با ۴۵/۲

با تقریب کمتر از ۱ برابر است با ۴۵

با تقریب کمتر از ۱۰ برابر است با ۵۰

با تقریب کمتر از ۱۰۰ برابر است با ۰.

پاسخ سؤال‌ها

۱. در گرد کردن، چون رقم دهگان ۸ و از ۵ بزرگ‌تر است، پس از قطع کردن ۸۱، یک واحد به رقم صدگان یعنی ۹ اضافه می‌شود. منتها نمی‌توانیم در این مرتبه ۱۰ بنویسیم، بنابراین، یک واحد به مرتبه‌ی بعد، یعنی یکان هزار، اضافه می‌شود و به ۹ تبدیل می‌شود و حاصل، ۱۹۰۰۰ است. قطع شده‌ی آن ۱۸۹۰۰ است.
۲. در گرد کردن، چون رقم یک‌هزارم، ۱ است و از ۵ کمتر است، پس بعد از قطع کردن ۱، رقم صدم تغییری نمی‌کند و ۱۹۸/۹۸ به دست می‌آید. قطع شده‌ی عدد نیز همین ۱۹۸/۹۸ خواهد بود.
۳. بیشترین اختلاف این دو تقریب ۱۰۰ واحد است. چون اگر گرد شده‌ی آن به عدد بالایی باشد، قطع شده‌اش هم که عدد پایینی است و در تقریب با دقت ۱۰۰، این دو عدد ۱۰۰ واحد فاصله دارند. روی محور اعداد برای خود ترسیم کنید و ببینید. شکل ۲ نیز در درک این موضوع به شما کمک می‌کند.
۴. از ۱۷۰۰ تا ۱۷۹۹. دلیل را شما بگویید.
۵. از ۱۶۵۰ تا ۱۷۵۰. دلیل را شما بگویید.

توجه کنید که در گرد کردن اعداد:

- عدد تقریبی گاهی از عدد اصلی کوچک‌تر است و گاهی بزرگ‌تر.
- دقت تقریب، توانی از ۱۰ است و با ارزش‌های مکانی اعداد متناظر است.
- اختلاف عدد اصلی با عدد تقریبی از دقت تقریب کوچک‌تر است.
- خطای تقریب کمتر یا برابر با خطای تقریب در روش قطع کردن است.
- باید ارزش مکانی را به خوبی بشناسیم و بتوانیم روی محور اعداد حقیقی جایگاه اعداد را نسبت به یکدیگر تعیین کنیم.